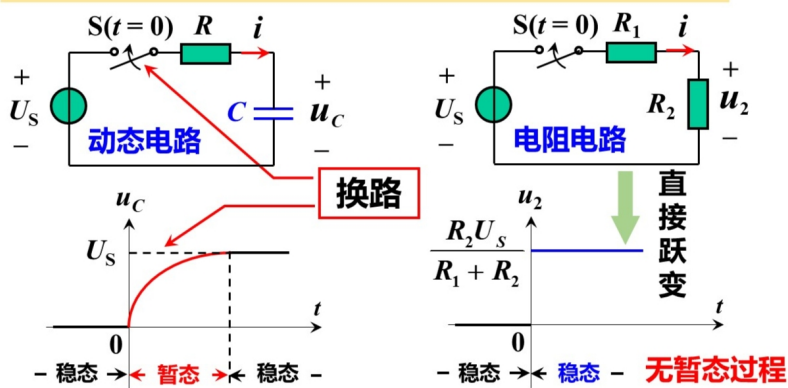


# 第9章 暂态电路

## 9.1 电路的初始条件

### 1.换路 (switching)

引起电路工作状态发生变化的诸因素统称为**电路的换路**。



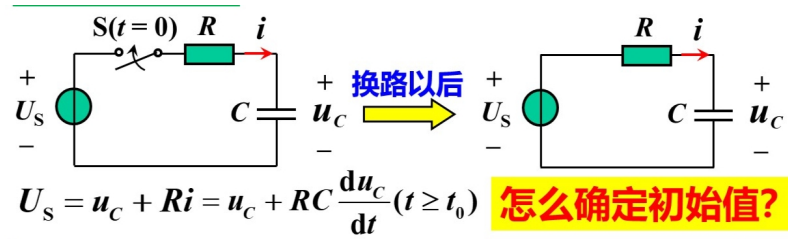
#### 1) 换路方式

开关的通、断；电源发生变化；元件参数发生变化

#### 2) 暂态 (transient state)

当电路从原来的稳定状态转入一个新的稳定状态时，需要经历一个过渡过程，称为**动态过程**。这个过程所经历的时间极为短暂，所以称这一过渡状态为**暂态**。

### 2.方程的列写



当电路只有一个动态元件，描述该电路的KVL或KCL方程为一阶线性常微分方程，称该电路为**一阶电路**。

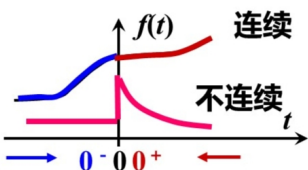
### 3.初始条件

#### 1) $t = 0^+$ 和 $t = 0^-$ 的概念

换路发生在  $t=0$  时刻

$0^-$  换路的前一瞬间

$0^+$  换路的后一瞬间

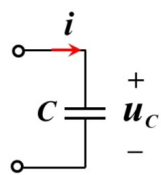


$$f(0^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} f(t) \qquad f(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} f(t)$$

希望获得  $t = 0^+$  时刻支路电压（电流）的**初值**和**导数的初值**。

## 2) 换路定律

a)



$t = 0^+$

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi$$

$$= u_c(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i(\xi) d\xi$$

$$u_c(0^+) = u_c(0^-) + \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i(\xi) d\xi$$

如果  $i(\xi)$  为有限值

$$\int_{0^-}^{0^+} i(\xi) d\xi \rightarrow 0 \longrightarrow \boxed{u_c(0^+) = u_c(0^-)}$$

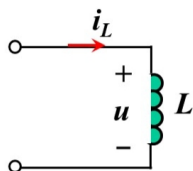
$$q = Cu_c \quad q(0^+) = q(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} i(\xi) d\xi$$

$$\boxed{q(0^+) = q(0^-)}$$

电荷守恒

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{0^-} i dt + \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i dt$$

b)



$t = 0^+$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\xi) d\xi$$

$$= i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^t u(\xi) d\xi$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) + \frac{1}{L} \int_{0^-}^{0^+} u(\xi) d\xi$$

如果  $u(\xi)$  为有限值

$$\int_{0^-}^{0^+} u(\xi) d\xi \rightarrow 0 \longrightarrow \boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-)}$$

$$\psi = Li_L \quad \psi(0^+) = \psi(0^-) + \int_{0^-}^{0^+} u(\xi) d\xi$$

$$\boxed{\psi(0^+) = \psi(0^-)}$$

磁链守恒

## 换路定理

$$\begin{cases} q(0^+) = q(0^-) \\ u_c(0^+) = u_c(0^-) \end{cases}$$

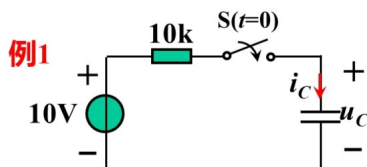
条件：换路时流经电容的电流为有限值

## 对偶

$$\begin{cases} \psi(0^+) = \psi(0^-) \\ i_L(0^+) = i_L(0^-) \end{cases}$$

条件：换路时电感上的电压为有限值

### 3) 确定电路的初值



换路前  $u_C(0^-) = 8V$  求电容电流初值  $i_C(0^+)$ 。

根据换路定理  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 8V$

如何求  $i_C$  在  $(0^+)$  时刻的值?

KVL

$$10k i_C(0^+) + u_C(0^+) = 10$$

$$i_C(0^+) = \frac{10 - 8}{10k} = 0.2mA$$

替代定理

结论1:  $i_C$  随便跳

$$i_C(0^-) = 0 \neq i_C(0^+)$$

结论2:

求初值时,

电容  $C$  可看作独立电压源

电感  $L$  可看作独立电流源

### 小结: 求电路初值的步骤

(a) 由换路前的稳态电路求  $u_C(0^-)$  和  $i_L(0^-)$

**0<sup>-</sup> 电路 (电阻电路) (电容  $C$  开路、电感  $L$  短路)**

(b) 应用换路定理求  $u_C(0^+)$  和  $i_L(0^+)$   $u_C(0^+) = u_C(0^-)$

(c) 画 **0<sup>+</sup> 时刻的等效电路**  $i_L(0^+) = i_L(0^-)$

\* 保留电路拓扑结构

\*\* 用独立电压源替代电容  $C$ 、用独立电流源替代电感  $L$

\*\*\* 独立电压源值为  $u_C(0^+)$ 、独立电流源值为  $i_L(0^+)$

(d) 由 **0<sup>+</sup> 电路 (电阻电路)** 求电路中其余支路量 **0<sup>+</sup> 时刻的值**

## 9.2 一阶电路的暂态和稳态响应

### 1. 一阶电路的全响应

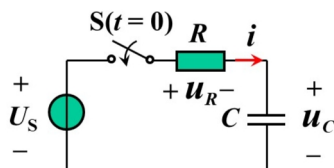
#### 1) RC 电路

已知:  $u_C(0^-) = U_0$

求: (1) 电容电压  $u_C(t)$ ;

(2) 电容电流  $i(t)$ ;

(3) 电阻电压  $u_R(t)$ 。



$t=0$  时开关闭合, 即换路之后, 输入为  $U_s$ , 由 KVL 有

$$\begin{cases} u_R + u_C = U_s \\ i = C \frac{du_C}{dt} \\ u_R = iR \end{cases} \Rightarrow iR + u_C = U_s \Rightarrow \boxed{RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s}$$

一阶线性常系数非齐次微分方程

根据换路定律可知  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$

过渡过程  
自由分量  
暂态分量

全解  $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_s \rightarrow u_C = u_{Cs} + u_{Ct}$

强制分量  
稳态分量

特解  $u_{Cs} = U_s$

通解  $u_{Ct} = Ae^{pt}$

齐次微分方程

$u_C(t) = U_s + Ae^{pt}$

$RC \frac{du_{Ct}}{dt} + u_{Ct} = 0$

特征方程

$u_C(t) = U_s + Ae^{-t/RC}$

$RCp + 1 = 0$

特征根

$p = -\frac{1}{RC}$

通解

$u_{Ct} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}}$

$u_C(0^+) = Ae^{0^+} + U_s = U_0$

$A = U_0 - U_s$

$u_C = U_s + (U_0 - U_s)e^{-t/RC} (t \geq 0)$

$$RC \frac{dAe^{pt}}{dt} + Ae^{pt} = 0$$

$$\cancel{ARCp}e^{pt} + \cancel{A}e^{pt} = 0$$

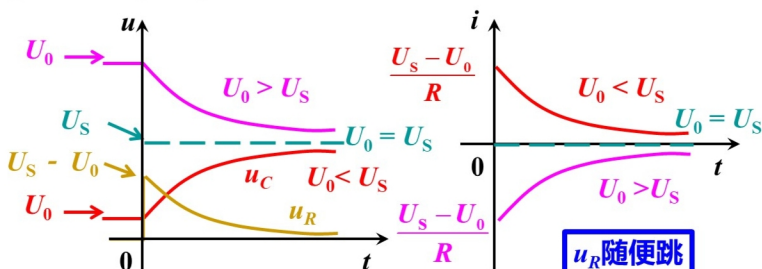
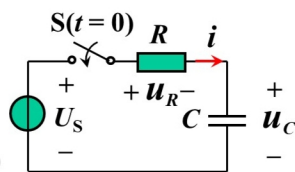
$$u_C(0^+) = U_s + Ae^{-\frac{0^+}{RC}} = U_s + A$$

全响应  $u_C = U_s + (U_0 - U_s)e^{-t/RC} (t \geq 0)$

进一步可求电流*i*和电阻电压 $u_R$

$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_s - U_0}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC} (t > 0)$

$u_R = Ri = (U_s - U_0)e^{-t/RC} (t > 0)$



可见  $u_C$  和  $i_C$  的衰减速率取决于  $RC$  之积。

令  $\tau = RC$ ，一阶RC电路的时间常数(time constant)。

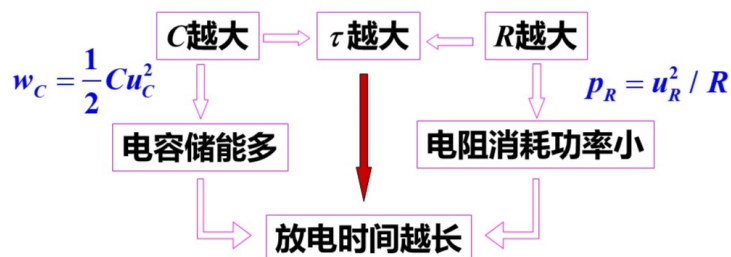
$$\tau = RC = [\text{欧}][\text{法}] = [\text{欧}] \left[ \frac{\text{库}}{\text{伏}} \right] = [\text{欧}] \left[ \frac{\text{安秒}}{\text{伏}} \right] = [\text{秒}]$$

$\tau$  对放电时间的影响

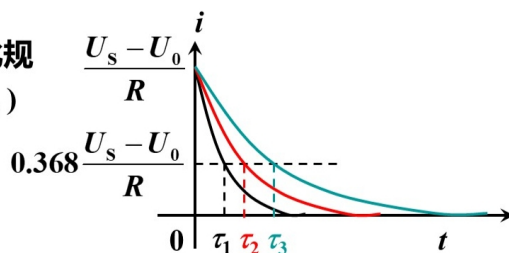
$t$	0	$\tau$	$2\tau$	$3\tau$	$4\tau$	$5\tau$	...	$\infty$
$i(t)$	$I_0$	$0.368I_0$	$0.135I_0$	$0.05I_0$	$0.018I_0$	$0.007I_0$	...	0

$\tau$  对放电时间的影响: 经过  $3\tau \sim 5\tau$  的时间, 放电基本结束。

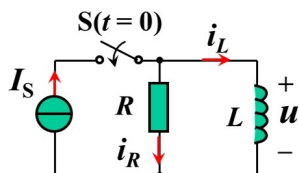
时间常数  $\tau$  的理解



不同  $\tau$  值对响应变化规律的影响 ( $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ )



## 2) RL 电路



已知:  $i_L(0^-) = I_0$

求: (1) 电感电流  $i_L(t)$ ;

(2) 电感电压  $u(t)$ ;

(3) 电阻电压  $u_R(t)$ 。

$t=0$  时开关闭合, 即换路之后, 输入为  $I_s$ , 由 KCL 有

$$\begin{cases} i_R + i_L = I_s \\ u = L \frac{di_L}{dt} \\ i_R = \frac{u}{R} \end{cases} \quad \text{一阶线性常系数非齐次微分方程}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{R} + i_L = I_s \Rightarrow \boxed{\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_s}$$

根据换路定律可知  $i_L(0^+) = i_L(0^-) = I_0$

过渡过程  
自由分量  
暂态分量

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L = I_s \quad \text{全解} \quad i_L = \boxed{i_{Ls}} + \boxed{i_{Lt}}$$

强制分量  
稳态分量

特解  $i_{Ls} = I_s$

通解  $i_{Lt} = Ae^{pt}$

齐次微分方程

$$i_L(t) = I_s + Ae^{pt}$$

$$\frac{L}{R} \frac{di_{Lt}}{dt} + i_{Lt} = 0$$

特征方程

$$\frac{L}{R} p + 1 = 0$$

特征根

$$p = -\frac{R}{L}$$

通解

$$i_{Lt} = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{L/R}}$$

$$i_L(0^+) = Ae^{0^+} + I_s = I_0$$

$$A = I_0 - I_s$$

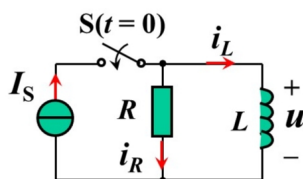
$$\boxed{i_L = I_s + (I_0 - I_s)e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (t \geq 0)}$$

全响应  $i_L = I_s + (I_0 - I_s)e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (t \geq 0)$

进一步可求电压  $u$  和电阻电流  $i_R$

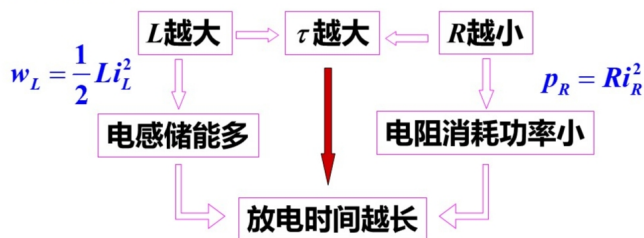
$$u = L \frac{di_L}{dt} = R(I_s - I_0)e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (t > 0)$$

$$i_R = \frac{u}{R} = (I_s - I_0)e^{-\frac{Rt}{L}} \quad (t > 0)$$



令  $\tau = \frac{L}{R}$ , 一阶LR电路的时间常数(time constant)。

时间常数  $\tau$  的理解



## 总结：全响应的一般形式

$$\boxed{x(t) = x_s(t) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}}$$

非齐次特解

齐次通解

全响应 = 强制分量 + 自由分量

全响应 = 稳态分量 + 暂态分量

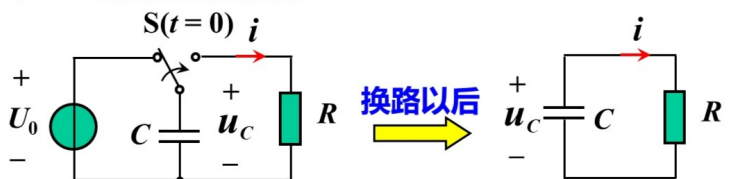
## 动态电路的经典解法

- 列 (有关待求支路量的) 微分方程。
- 由换路前  $0^-$  电路求  $u_C(0^-)$  和  $i_L(0^-)$  的值。
- 应用换路定理画  $0^+$  电路, 求待求支路量的  $0^+$  时刻值。
- 求微分方程对应的特征方程, 得到齐次通解。
- 求出非齐次微分方程的 1 个特解, 得到非齐次微分方程的全解。全解 = 齐次解 + 特解
- 由  $0^+$  时刻的值确定全解中的待定系数。

### 2. 一阶电路的零输入响应

电路换路后输入为 0 (即没有外施激励) 时的电路响应, 称为电路的零输入响应, 它仅由电路的初始状态引起的响应。

#### 1) RC 电路的零输入响应

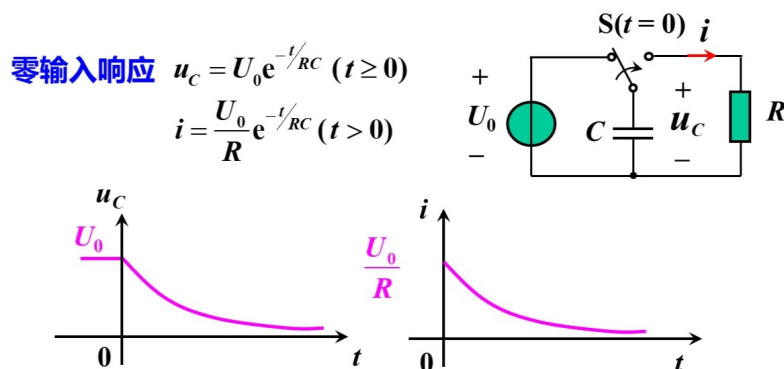


$t < 0$  时,  $u_C(0^-) = U_0$

$t = 0$  时, 换路之后, 由 KVL 有

$$-Ri + u_C = -R(-C \frac{du_C}{dt}) + u_C = RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

一阶线性常系数齐次微分方程



可见  $u_C$  和  $i$  的衰减速率取决于  $RC$  之积, 最终趋近于 0。

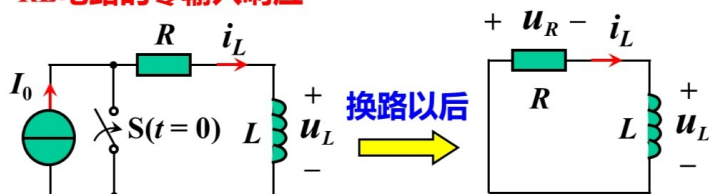
电容初始储存的电场能  $W_C = \frac{1}{2} C U_0^2$

能量守恒

被电阻吸收并转化为热能

$$W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \int_0^\infty R \left( \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 dt = \frac{U_0^2}{R} \left( -\frac{RC}{2} \right) e^{-\frac{2t}{RC}} \Big|_0^\infty = \frac{1}{2} C U_0^2$$

## 1) $RL$ 电路的零输入响应



$t < 0$ 时,  $i_L(0^-) = I_0$

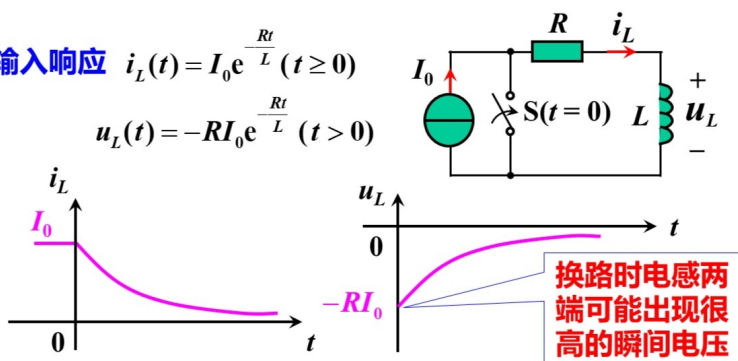
$t = 0$ 时, 换路之后, 由KVL有

$$u_L + u_R = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$

### 一阶线性常系数齐次微分方程

零输入响应  $i_L(t) = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}} (t \geq 0)$

$$u_L(t) = -RI_0 e^{-\frac{Rt}{L}} (t > 0)$$



可见  $i_L$  和  $u_L$  的衰减速率取决于  $L/R$ , 最终趋近于0。

电感初始储存的磁场能  $W_L = \frac{1}{2} LI_0^2$

被电阻吸收并转化为热能  $W_R = \frac{1}{2} LI_0^2$

能量守恒

## 总结：零输入响应的一般形式

$$x(t) = x(0^+) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$x(0^+)$  为所求响应的初始值。

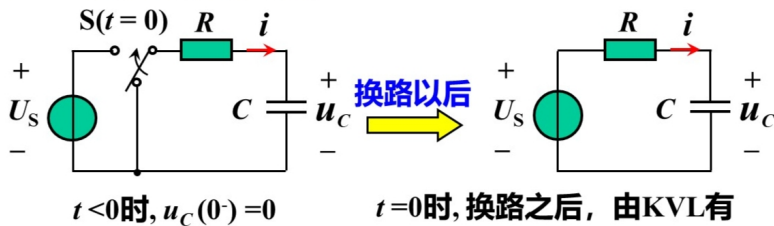
$\tau$  为电路的时间常数。

$$\tau = \begin{cases} RC & RC \text{电路} \\ \frac{L}{R} & RL \text{电路} \end{cases}$$

### • 3. 一阶电路的零状态响应

电路换路后初始状态为0（即没有初始储能）时的电路响应，称为电路的零状态响应，它仅由电路的输入引起的响应。

### 1) RC电路的零状态响应

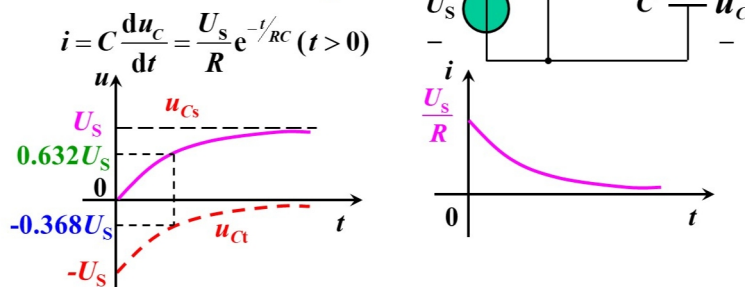


$$Ri + u_c = R\left(C \frac{du_c}{dt}\right) + u_c = \boxed{RC \frac{du_c}{dt} + u_c = U_s}$$

一阶线性常系数非齐次微分方程

零状态响应  $u_c = U_s - U_s e^{-t/RC} (t \geq 0)$

进一步可求电流和电阻电压  $u_R$

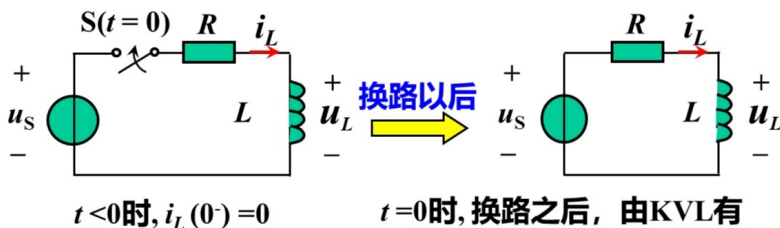


可见  $u_c$  的充电快慢取决于时间常数  $\tau = RC$ 。

电容最终储存的电场能  $W_C = \frac{1}{2}CU_s^2$

电阻在整个充电过程中消耗的能量为  $W_R = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{U_s^2}{R} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{RC}} dt = \frac{1}{2}CU_s^2$

### 2) LR电路的零状态响应



$$u_L + Ri_L = \boxed{Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = u_s} \quad \text{一阶线性常系数非齐次微分方程}$$

设电压源电压为  $u_s = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u)$

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = \sqrt{2}U \cos(\omega t + \phi_u) \quad \text{接入初相位}$$

# 总结：零状态响应的一般形式

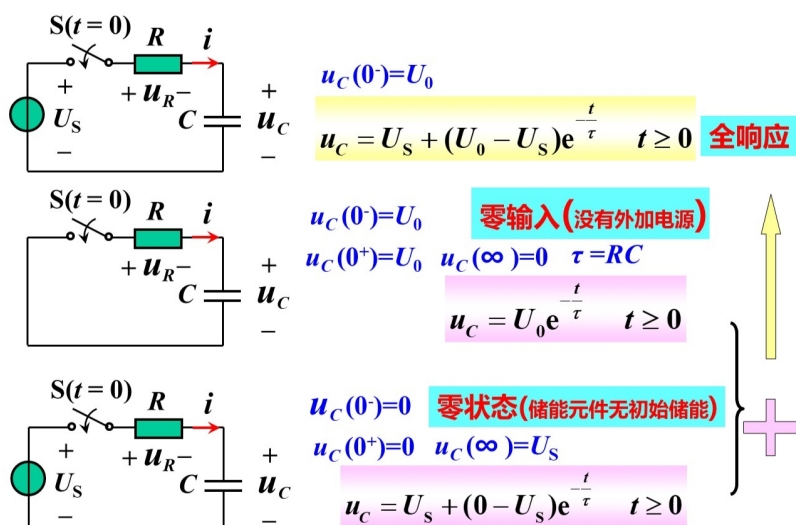
$$x(t) = x_s(t) - x_s(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$x_s(t)$  为所求响应的稳态分量。

$x_s(0^+)$  与稳态分量  $0^+$  时刻值有关。

$\tau$  为电路的时间常数。

$$\tau = \begin{cases} RC & RC \text{ 电路} \\ \frac{L}{R} & RL \text{ 电路} \end{cases}$$



## 总结：全响应

$$u_C(t) = \underbrace{u_C(\infty)}_{\text{强制分量/非齐次特解}} + \underbrace{[u_C(0^+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{自由分量/齐次通解}}$$

$$= \underbrace{\left[ u_C(\infty) - u_C(\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} \right]}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{u_C(0^+)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}}$$

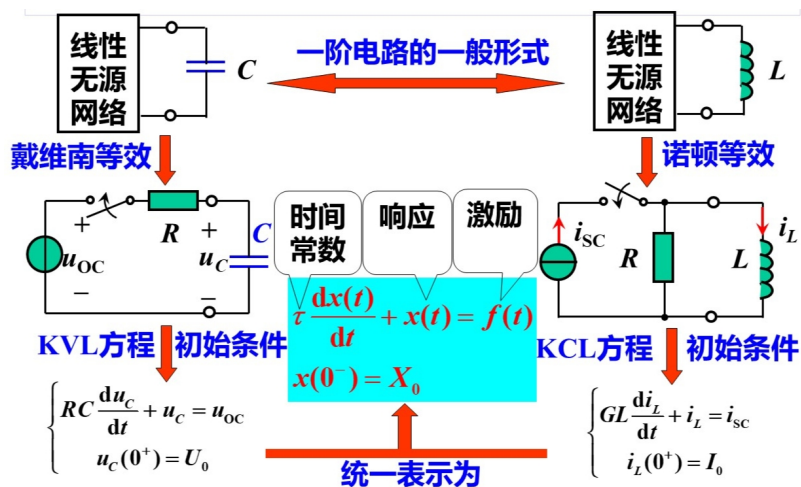
数学视角 方程视角

电路视角 能量视角

全响应 = 强制分量 + 自由分量  
= 零输入响应 + 零状态响应

为什么要这样划分?

- 全响应、零状态响应和零输入响应中都含有自由分量;
- 零输入响应中只有自由分量;
- 零状态响应中一般既含强制分量, 也含自由分量。



根据换路定律可知  $x(0^+) = x(0^-) = X_0$

全解  $\rightarrow$

$$\tau \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = f(t) \rightarrow x(t) = \boxed{x_s(t)} + \boxed{x_t(t)} = x_s + Ae^{-t/\tau}$$

$x_s(t)$  为特解，是电路达到的稳定状态，当它为直流源时表示为  $x(\infty)$

待定系数

$$x(t) = x_s(t) + Ae^{-t/\tau}$$

令  $t = 0^+$  时刻， $x(0^+) = x_s(t) + Ae^{0^+}$

直流激励作用

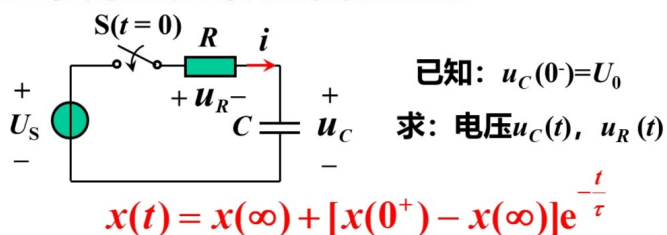
$$\therefore A = x(0^+) - x_s(0^+) \quad x_s(0^+) = x_s(\infty) = x(\infty)$$

$$x(t) = x(\infty) + [x(0^+) - x(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

三要素

$x(\infty)$	稳态解	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">           优点1: 可适用于各支路量         </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block; margin-top: 5px;">           优点2: 不列写方程直接获得解         </div>
$x(0^+)$	初值	
$\tau$	时间常数	

## 同三要素法重做前面的例子



$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 \quad \longleftrightarrow \quad u_R(0^+) = U_s - U_0$$

$$u_C(\infty) = U_s \quad \longleftrightarrow \quad u_R(\infty) = 0$$

$$\tau = RC \quad \longleftrightarrow \quad \tau = RC$$

$$u_C = U_s + (U_0 - U_s)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0 \quad u_R = (U_s - U_0)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t > 0$$

## 三要素法步骤

$$x(t) = x(\infty) + [x(0^+) - x(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- 计算稳态值  $x(\infty)$  : 当  $t \rightarrow \infty$ , 电路达到新的稳定状态时, 响应的值, 可以采用直流电路的各种分析方法。此时, 电感相当于短路, 电容相当于开路
- 计算初始值  $x(0^+)$  : 按第1节中求初始值的步骤
- 计算时间常数  $\tau$  : 对于  $RC$  电路  $\tau = RC$  ; 对于  $RL$  电路  $\tau = L/R$ , 求  $R$  可以采用第二章中的求等效电阻的所有方法

## 关于三要素法的讨论

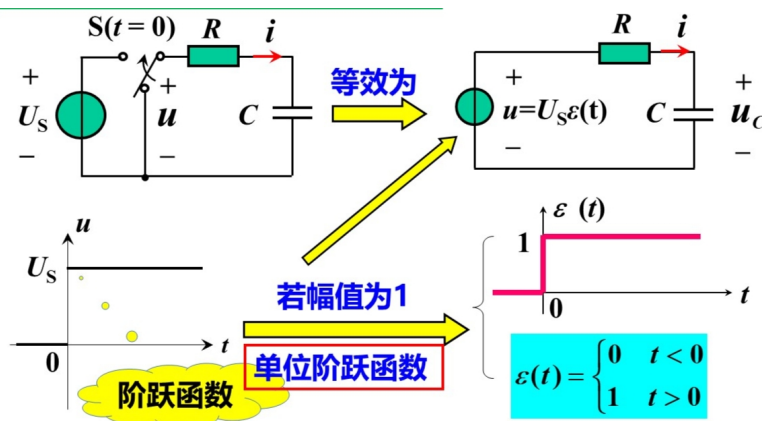
• 适用于:

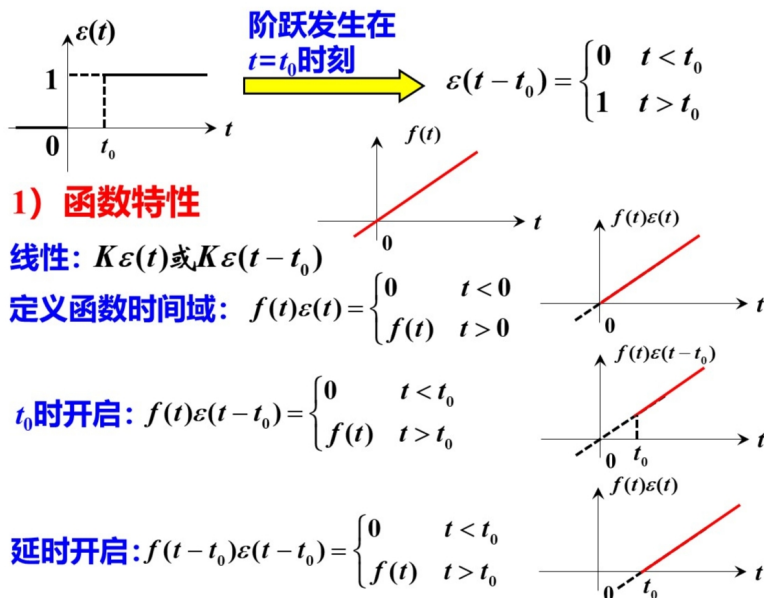
$$x(t) = x_s(t) + [x(0^+) - x_s(0^+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- 时间常数、初值、终值比较容易求的场合
- 直流激励或正弦激励 → 第二节
- 可用于求电路任意支路的电压或电流
- 仅对一阶电路适用
- 时间常数的概念仅对一阶电路适用

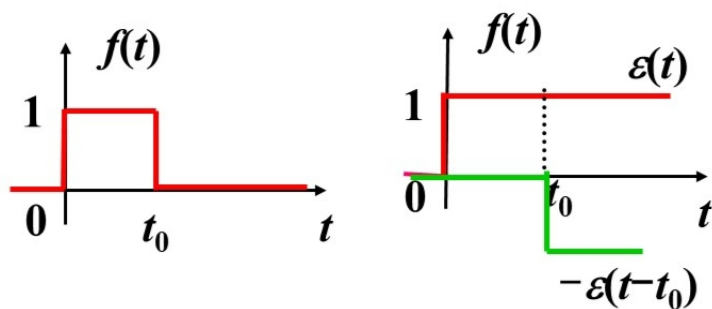
### 9.4 阶跃响应和冲击响应

#### 1. 阶跃函数 (Step function)





表示单脉冲:  $f(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-t_0)$

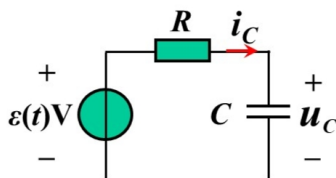


## 2. 阶跃响应 (Step response)

当电路的输入为 (单位) 阶跃函数时, 相应的响应为 (单位) **阶跃响应**。因换路前输入为零, 所以电路的 (单位) 阶跃响应实际上是在 (单位) 阶跃输入作用下的零状态响应。

图示电路,  $t < 0$  时, 由于输入为零, 故  $u_C(0^-) = 0$

$t = 0$  时发生换路, 1V 电压源开始作用, 可用三要素法分析如下:



根据换路定律:  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$

$$u_C(\infty) = 1V, \quad \tau = RC$$

$$u_C(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (t > 0)$$

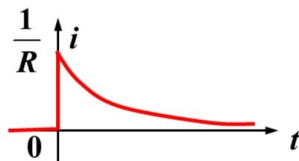
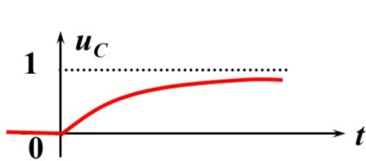
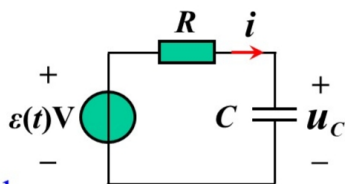
采用  $\varepsilon(t)$  表示时间域, 故所求结果也可以写作:

$$u_C(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)V$$

而不必再另行标注时间域了。

$$u_C(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t) \text{ V}$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{C}{RC} e^{-\frac{1}{RC}} = \frac{1}{R} e^{-\frac{1}{RC}} \varepsilon(t) \text{ A}$$



### 1) 单位阶跃响应的特性

若记单位阶跃输入  $\varepsilon(t)$  的响应记为  $s(t) = x(t) \varepsilon(t)$ , 则

激励

响应

$$K \varepsilon(t) \quad Ks(t) = Kx(t) \varepsilon(t)$$

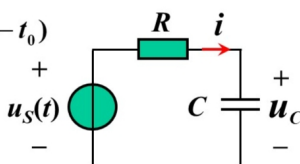
$$\varepsilon(t - t_0) \quad s(t) = x(t - t_0) \varepsilon(t - t_0)$$

### 2) 脉冲响应

若激励为  $u_s(t)$ , 则根据特性可得

激励

响应



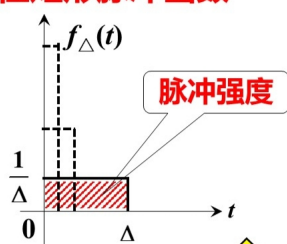
$$u_s'(t) = U_s \varepsilon(t) \quad u_C'(t) = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t) \text{ V}$$

$$u_s''(t) = -U_s \varepsilon(t - t_0) \quad u_C''(t) = -U_s (1 - e^{-\frac{t-t_0}{RC}}) \varepsilon(t - t_0) \text{ V}$$

$$u_s(t) = U_s \varepsilon(t) - U_s \varepsilon(t - t_0) \quad u_C(t) = U_s (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \varepsilon(t) - U_s (1 - e^{-\frac{t-t_0}{RC}}) \varepsilon(t - t_0) \text{ V}$$

## 3. 冲击函数 (Impact function)

### 1) 单位矩形脉冲函数



$$f_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & t > \Delta \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} f_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

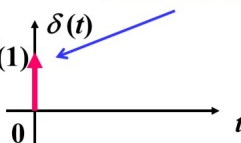
### 2) 单位冲击函数

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{奇异} & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

冲击强度

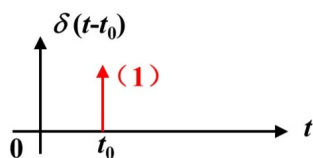
表示无穷大数值



### 3) 冲击函数的特性

#### 冲击函数延迟

$$\begin{cases} \delta(t-t_0)=0 & (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = 1 \end{cases}$$



#### 冲击函数对称

对于  $t=0$  或  $t=t_1$  处连续的任意函数  $f(t)$

$$\begin{cases} \delta(t) = \delta(-t) \\ \delta(t-t_0) = \delta(t_0-t) \end{cases} \quad \begin{cases} f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \\ f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases}$$

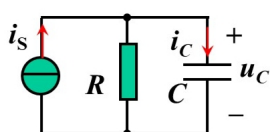
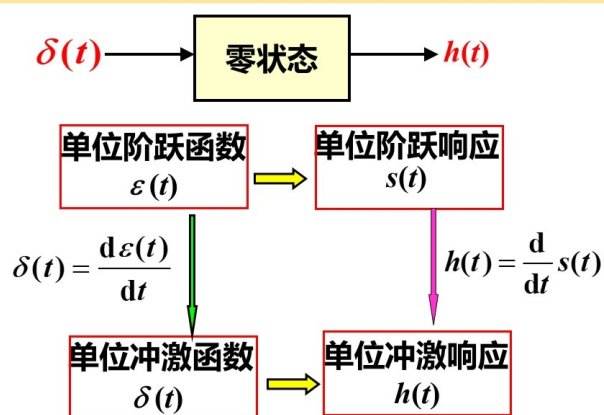
#### 冲击函数与阶跃函数关系

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^t \delta(\xi) d\xi = \varepsilon(t) \\ \int_{-\infty}^t \delta(\xi-t_1) d\xi = \varepsilon(t-t_1) \end{cases} \xleftrightarrow{\text{逆过程}} \begin{cases} \delta(t) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \varepsilon'(t) \\ \delta(t-t_1) = \frac{d}{dt} \varepsilon(t-t_1) = \varepsilon'(t-t_1) \end{cases}$$

### 4. 冲击响应 (Impact response)

**冲激响应:** 电路在冲激电源作用下的零状态响应。

**单位冲激响应:** 线性电路的冲激响应与电源的冲激强度之比, 以  $h(t)$  表示。



已知:  $u_C(0^-) = 0$

求: 当  $i_s(t)$  为单位冲激时, 电路响应  $u_C(t)$  和  $i_C(t)$ 。

先求**单位阶跃响应** 令  $i_s = \varepsilon(t)$   
( $t=$

$$u_C(0^+) = 0 \quad u_C(\infty) = R \quad \tau = RC \quad \left| \quad i_C(0^+) = 1 \quad i_C(\infty) = 0 \right.$$

$$u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \quad \left| \quad i_C = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \right.$$

### 单位阶跃响应

$$u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \quad i_C = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

再求单位冲激响应 令  $i_S(t) = \delta(t)$

$$u_C(t) = \frac{d}{dt} \left[ R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \right] = \underbrace{R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)}_0 + \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

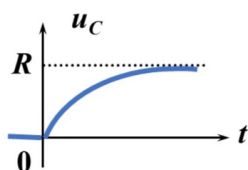
$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

$$i_C(t) = \frac{d}{dt} [e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)] = e^{-\frac{t}{RC}}\delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$
$$= \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

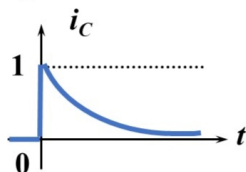
必须对表示为全时间轴  $(-\infty, \infty)$  形式的单位阶跃响应求导

### 单位阶跃响应

$$u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

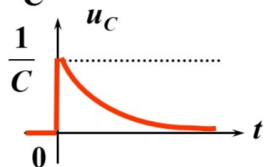


$$i_C = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

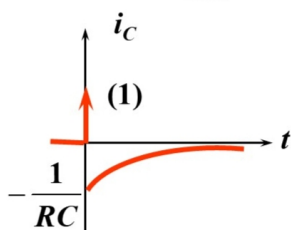


### 单位冲激响应

$$u_C = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$



$$i_C = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$



## 9.5 卷积积分

### 为什么要研究单位冲激响应?

求任意激励作用下动态电路零状态响应的需要。  
——卷积积分

获取系统自身性质的需要。

自动控制原理、信号与系统、数字信号处理等课程

### 1) 卷积积分

定义 设  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$   $t < 0$  均为零

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

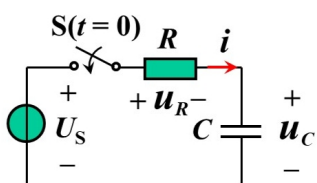
## 2) 卷积积分的应用



$$r(t) = e(t) * h(t)$$

$$\text{即 } r(t) = \int_0^t e(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

利用卷积积分可以求任意激励作用下电路的零状态响应



激励 - 响应线性关系

$u_C(0^-)=0$  零状态

$$u_C = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

激励

响应

$$U_s$$

$$u_C = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

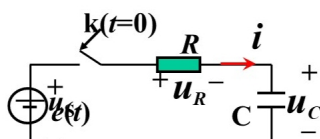
$$2U_s$$

$$u_C = 2U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

$$U_{s1} + U_{s2}$$

$$u_C = (U_{s1} + U_{s2})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

输入 - 输出线性关系



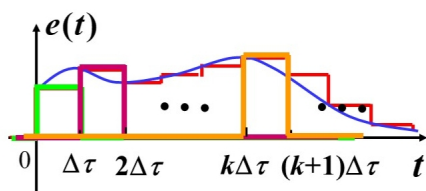
$u_C(0^-)=0$  零状态

$$u_C = U_s(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad t \geq 0$$

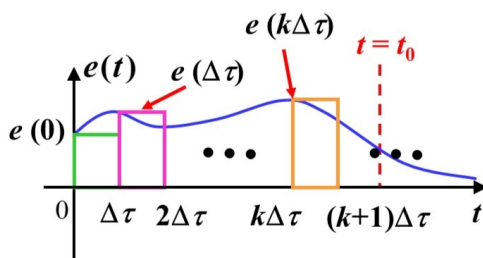
任意激励  $\xrightarrow{\text{时间上分割}}$  若干脉冲函数之和  $\xrightarrow{\text{输入输出的线性关系}}$  响应为脉冲函数的响应之和

取极限

响应为激励与单位冲激响应的卷积积分



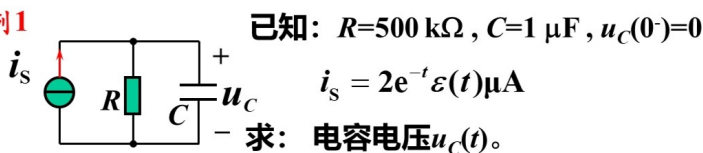
物理解释



$t = t_0$ 时刻的响应是由  $0 < t < t_0$ 时段的全部激励决定的（动态电路的记忆性质，线性系统的因果性）。

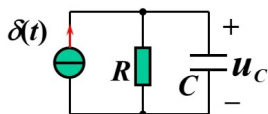
在  $0 < t < t_0$ 时段将激励  $e(t)$ 看成一列 ( $N$ 个)宽度为  $\Delta \tau$ , 高度为  $e(k\Delta \tau)$ 矩形脉冲的和。

**例1**



**解:** 先求该电路的**单位冲激响应**  $h(t)$

设  $i_s = \delta(t)\mu\text{A}$

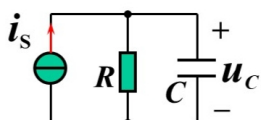


$$u_C(0^+) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} i_s dt = \frac{1}{C} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt = \frac{10^{-6}}{C} = 1\text{V}$$

$$u_C(\infty)=0$$

$$\tau = RC = 500 \times 10^3 \times 10^{-6} = 0.5\text{ s}$$

$$\therefore h(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)\text{V}$$



**单位冲激响应**

$$h(t) = e^{-2t}\varepsilon(t)\text{V}$$

用卷积积分计算  $i_s = 2e^{-t}\varepsilon(t)\mu\text{A}$  作用下的响应  $u_C(t)$

$$u_C(t) = i_s(t) * h(t) = \int_0^t i_s(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

$$= \int_0^t 2e^{-\tau} \times e^{-2(t-\tau)} d\tau$$

$$= 2e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = 2e^{-2t} (e^t - 1)$$

$$= (2e^{-t} - 2e^{-2t})\varepsilon(t)\text{V}$$

• 9.6 二阶电路的暂态响应

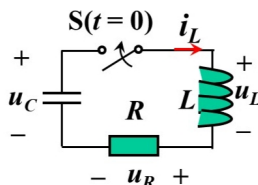
- **二阶电路:** 用二阶微分方程描述的电路 (一般含两个储能元件)。
- 二阶电路的零输入响应

**1) 列二阶方程**

$t=0$ 时开关接通。  $t>0$ 时由KVL得

$$u_C = u_L + u_R$$

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di_L}{dt} \\ u_R = Ri_L \\ i_L = -C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_C = L \frac{di_L}{dt} + Ri_L \\ i_L = -C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$



$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

衰减系数  $2\delta$       自由振荡角频率/自然角频率  $\omega_0^2$

二阶常系数线性齐次微分方程的两个初始条件为

$$\begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0^+} = -\frac{1}{C} i_L(0^+) = -\frac{1}{C} i_L(0^-) = 0 \end{cases}$$

2) 求自由分量      LC参数不变, 随R增加, 状态怎么变?

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0 \quad \text{此处可以有弹幕}$$

特征方程  $p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0$

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{或} \quad p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$\delta^2 > \omega_0^2$	$\delta^2 = \omega_0^2$	$\delta^2 < \omega_0^2$	$\delta = 0$
$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$	$p_1 = p_2 = -\delta$	$p_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$	$p_{1,2} = \pm j\omega_0$
<b>过阻尼</b>	<b>临界阻尼</b>	<b>欠阻尼</b>	<b>无阻尼</b>
$u_C = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$	$u_C = Ae^{p_1 t} + Bte^{p_1 t}$	$u_C = Ke^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta)$	$u_C = K \cos(\omega_0 t + \theta)$

a)  $\delta^2 > \omega_0^2$ , 即电路参数满足  $R > 2\sqrt{L/C}$

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

此时  $p_1$ 、 $p_2$  互异

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

通解为

$$u_C = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$$

$$u_C = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t} \quad \begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_L(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^-) = 0 \end{cases}$$

解得

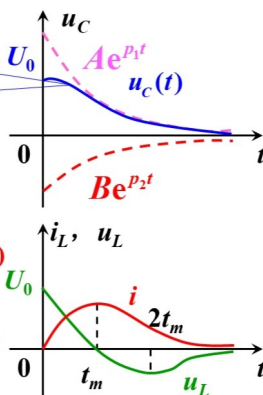
$$t_m = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

衰减非振荡  
(过阻尼)过程

$$u_C = \frac{U_0}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \quad (t > 0)$$

$$i_L = -C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{L(p_2 - p_1)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \quad (t > 0)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = -\frac{U_0}{(p_2 - p_1)} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}) \quad (t > 0)$$



$$u_C(0^+) = Ae^{p_1 0^+} + Be^{p_2 0^+} = A + B = U_0$$

$$\left. \frac{du_C(t)}{dt} \right|_{t=0^+} = Ap_1 e^{p_1 t} + Bp_2 e^{p_2 t} \Big|_{t=0^+}$$

$$= Ap_1 e^{p_1 0^+} + Bp_2 e^{p_2 0^+} = Ap_1 + Bp_2 = 0$$

b)  $\delta^2 = \omega_0^2$  , 即电路参数满足  $R = 2\sqrt{L/C}$

$$p_1 = p_2 = p = -\delta$$

此时  $p_1$ 、 $p_2$  为相等负实根

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$



通解为

$$u_C = (A + Bt)e^{-\delta t}$$

$$u_C = (A + Bt)e^{-\delta t} \begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_L(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^-) = 0 \end{cases}$$

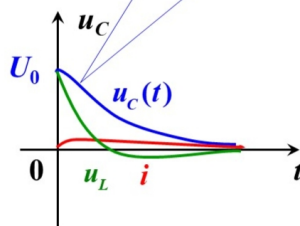
解得

$$u_C = U_0(1 + \delta t)e^{-\delta t} \quad (t > 0)$$

$$i_L = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{L} t e^{-\delta t} \quad (t > 0)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = U_0(1 - \delta t)e^{\delta t} \quad (t > 0)$$

衰减非振荡 (临界阻尼) 过程



c)  $\delta^2 < \omega_0^2$ , 即电路参数满足  $R < 2\sqrt{L/C}$

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + j\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - j\omega_d$$

此时  $p_1, p_2$  共轭

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

将  $p_1, p_2$  代入 通解  $u_C = Ae^{p_1 t} + Be^{p_2 t}$

$$A = A_1 + A_2$$

$$B = A_1 - A_2$$

$$u_C = Ae^{(-\delta + j\omega_d)t} + Be^{(-\delta - j\omega_d)t} = e^{-\delta t} (Ae^{j\omega_d t} + Be^{-j\omega_d t})$$

$$= e^{-\delta t} (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \sin \omega_d t)$$

$$K = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{A_2}{A_1}$$

$$u_C = Ke^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

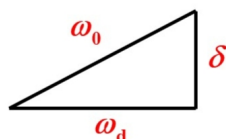
有关RLC串联欠阻尼3个参数的讨论

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \underbrace{\left( \frac{R}{L} \right)}_{2\delta} \frac{du_C}{dt} + \underbrace{\left( \frac{1}{LC} \right)}_{\omega_0^2} u_C = 0$$

衰减系数  $\delta$

自由振荡角频率/  
自然角频率  $\omega_0$

$$\omega_0^2 = \omega_d^2 + \delta^2$$



$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\delta \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

$$b^2 - 4ac < 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-2\delta \pm j2\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{2}$$

$$= -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$= -\delta \pm j\omega_d$$

衰减振荡角频率  $\omega_d$

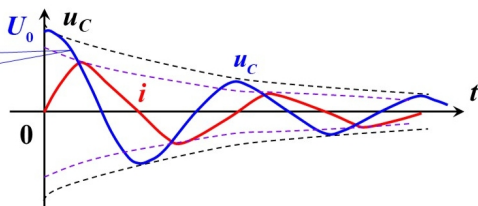
$$u_C = K e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta) \quad \begin{cases} u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0 \\ \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{1}{C} i_L(0^+) = \frac{1}{C} i_L(0^-) = 0 \end{cases}$$

解得

$$u_C = \frac{\omega_0}{\omega_d} U_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \theta) (t > 0) \quad i = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{\omega_d L} e^{-\delta t} \sin \omega_d t (t > 0)$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \frac{\omega_0}{\omega_d} U_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_d t - \theta) \quad (t > 0)$$

衰减振荡  
(欠阻尼)过程



## 总结

**临界电阻**  $R_k = 2\sqrt{L/C}$

a)  $\delta^2 > \omega_0^2$ , 即电路参数满足  $R > 2\sqrt{L/C}$

**衰减非振荡 (过阻尼)**

b)  $\delta^2 = \omega_0^2$ , 即电路参数满足  $R = 2\sqrt{L/C}$

**衰减非振荡 (临界阻尼)**

c)  $\delta^2 < \omega_0^2$ , 即电路参数满足  $R < 2\sqrt{L/C}$

**衰减振荡 (欠阻尼)**

d)  $\delta = 0$ , 即电路参数满足  $R = 0$

**等幅振荡**

## 例题

$R$ 分别为 $5\Omega$ 、 $4\Omega$ 、 $1\Omega$ 、 $0\Omega$ 时求 $u_C(t)$ 、 $i_L(t)$ ,  $t \geq 0$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$



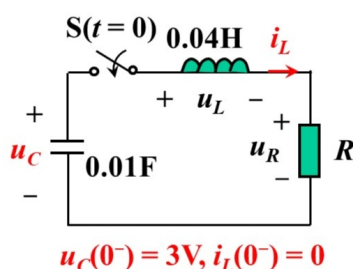
$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 25R \frac{du_C}{dt} + 2500 u_C = 0$$



特征方程

$$p^2 + 25Rp + 2500 = 0$$

$$b^2 - 4ac = 625R^2 - 10000$$



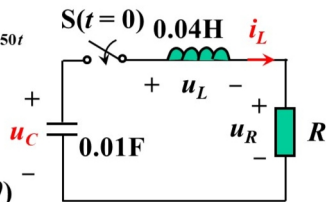
$$\begin{aligned}
 & p^2 + 25Rp + 2500 = 0 \\
 & b^2 - 4ac = 625R^2 - 10000
 \end{aligned}$$

$R=5\Omega \rightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac = 5625 > 0 \\ p_1 = -25 \quad p_2 = -100 \\ u_C(t) = A_1 e^{-25t} + A_2 e^{-100t} \end{cases}$

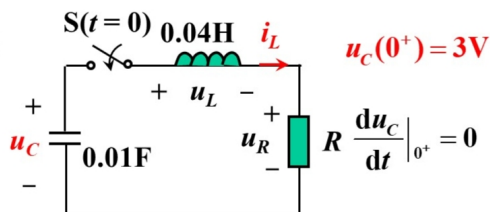
$R=4\Omega \rightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac = 0 \\ p_1 = p_2 = -50 \\ u_C(t) = A_1 e^{-50t} + A_2 t e^{-50t} \end{cases}$

$R=1\Omega \rightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac = -9375 < 0 \\ p_{1,2} = -12.5 \pm j48.4 \\ u_C = K e^{-12.5t} \cos(48.4t + \theta) \end{cases}$

$R=0\Omega \rightarrow \begin{cases} p_{1,2} = \pm j50 \\ u_C = K \cos(50t + \theta) \end{cases}$



用初值确定待定系数



$$R=5\Omega \rightarrow \begin{cases} u_C(t) = A_1 e^{-25t} + A_2 e^{-100t} \\ A_1 + A_2 = 3 \\ -25A_1 - 100A_2 = 0 \end{cases} \rightarrow A_1 = 4 \quad A_2 = -1$$

$$u_C(t) = 4e^{-25t} - e^{-100t} \text{ V} \quad t > 0^+$$

$$C \frac{du_C}{dt} = -i_L$$

$$i_L(t) = e^{-25t} - e^{-100t} \text{ A} \quad t > 0^+$$

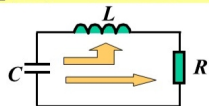
波形图和能量转换关系

$R=5\Omega$

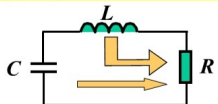
$$u_C(t) = 4e^{-25t} - e^{-100t} \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$i_L(t) = e^{-25t} - e^{-100t} \text{ A} \quad (t > 0)$$

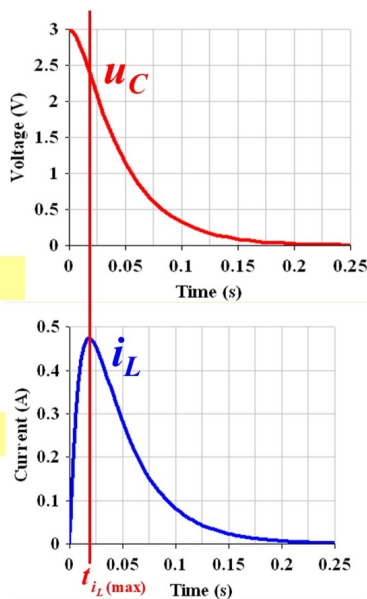
$0 < t < t_{i_L(\max)}$   $u_C$  减小,  $i_L$  增大。

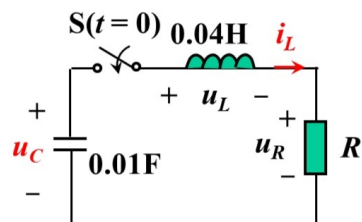


$t > t_{i_L(\max)}$   $u_C$  减小,  $i_L$  减小。



非振荡放电 过阻尼





$$u_C(0) = 3V$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 0$$

$$R=4\Omega \rightarrow \begin{cases} u_C(t) = A_1 e^{-50t} + A_2 t e^{-50t} \\ A_1 = 3 \\ -50A_1 + A_2 = 0 \end{cases} \rightarrow A_1 = 3 \quad A_2 = 150$$

$$u_C(t) = 3e^{-50t}(1 + 50t)V \quad t > 0^+$$

$$C \frac{du_C}{dt} = -i_L$$

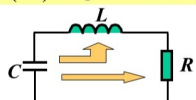
$$i_L(t) = 75te^{-50t}A \quad t > 0^+$$

$$R=4\Omega$$

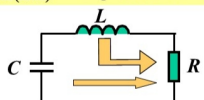
$$u_C(t) = 3e^{-50t}(1 + 50t)V \quad (t > 0)$$

$$i_L(t) = 75te^{-50t}A \quad (t > 0)$$

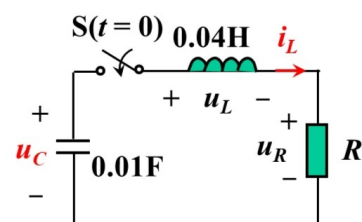
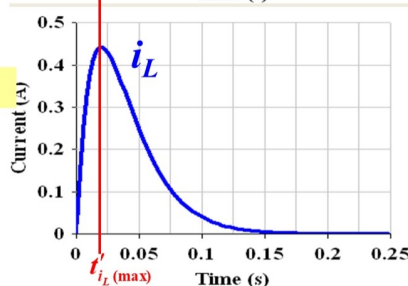
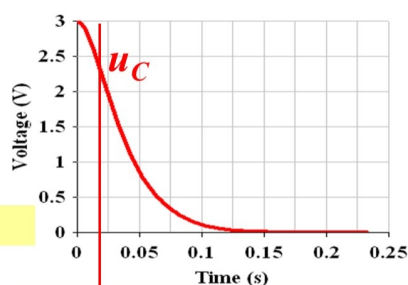
$0 < t < t'_{i_L(\max)}$   $u_C$  减小,  $i_L$  增大。



$t > t'_{i_L(\max)}$   $u_C$  减小,  $i_L$  减小。



非振荡放电 临界阻尼



$$u_C(0) = 3V$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 0$$

$$R=1\Omega \rightarrow \begin{cases} u_C(t) = Ke^{-12.5t} \sin(48.4t + \theta) \\ K \sin \theta = 3 \\ -12.5K \sin \theta + 48.4K \cos \theta = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow K = 3.1 \quad \theta = 75.5^\circ$$

$$u_C(t) = 3.10e^{-12.5t} \sin(48.4t + 75.5^\circ)V \quad t > 0^+$$

$$C \frac{du_C}{dt} = -i_L$$

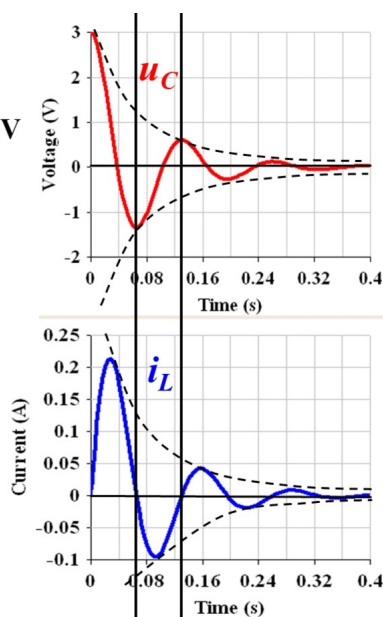
$$i_L(t) = 1.55e^{-12.5t} \sin(48.4t)A \quad t > 0^+$$

$$R = 1 \Omega$$

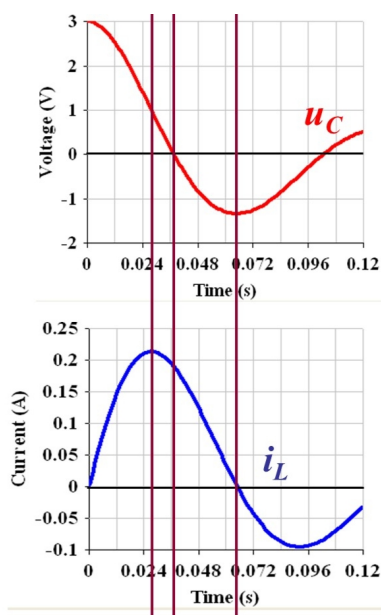
$$u_C(t) = 3.10e^{-12.5t} \cos(48.4t + 75.5^\circ) \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$i_L(t) = 1.55e^{-12.5t} \sin 48.4t \text{ A} \quad (t > 0)$$

衰减振荡 欠阻尼

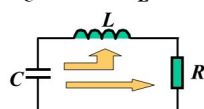


讨论半个周期中能量的关系



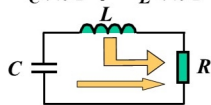
$$0 \leq 48.4t \leq 75.5^\circ$$

$u_C$  减小,  $i_L$  增大



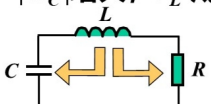
$$75.5^\circ \leq 48.4t \leq 104.5^\circ$$

$u_C$  减小,  $i_L$  减小



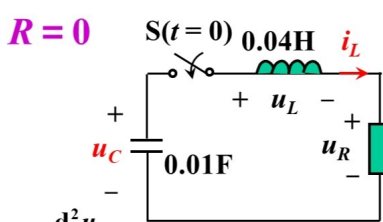
$$104.5^\circ \leq 48.4t \leq 180^\circ$$

$|u_C|$  增大,  $i_L$  减小



周而复始, 电阻不断消耗能量  $u'_C$   $i'_L$  衰减到零

$$R = 0$$



$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

$$p^2 + 2500 = 0 \quad p = \pm j50$$

$$u_C(t) = K \cos(50t + \theta)$$

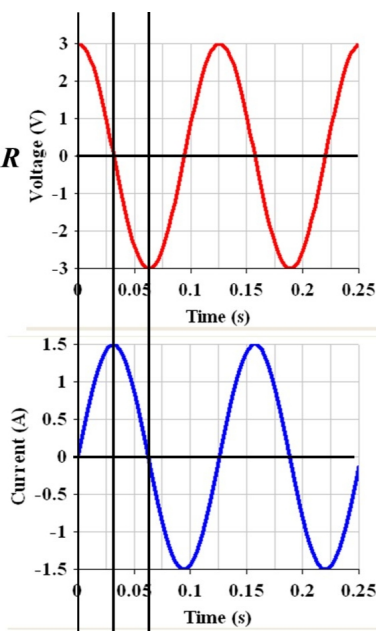
$$u_C(0) = 3 \quad \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 0$$

$$K = 3 \quad \theta = 0^\circ$$

$$u_C(t) = 3 \cos 50t \text{ V} \quad (t > 0)$$

$$i_L(t) = 1.5 \sin 50t \text{ A} \quad (t > 0)$$

等幅振荡 无阻尼



## 电磁轨道炮脉冲电源的基本电路 (PFU)

4个PFU并联

